Jasbir Chahal
Department of Mathematics
Brigham Young University, Provo, Utah
jasbir@mathematics.byu.edu

Jaap Top
Johann Bernoulli Instituut
Universiteit Groningen
j.top@rug.nl

Geschiedenis

F. van der Blij en de Kletter-driehoeken

Door een lezing van Frederik van der Blij op de jaarlijkse wiskundelerarendag in Groningen in 2003, raakten Jasbir Chahal en Jaap Top geïnteresseerd in de zogenaamde Kletter-driehoeken. In dit artikel gaan zij nader in op deze bijzondere driehoeken.

Met deze tekst hopen we u wat te leren over een merkwaardig soort driehoeken, namelijk waarbij een deellijn door een van de hoekpunten, de zwaartelijn door een tweede hoekpunt, en ten slotte de hoogtelijn uit het resterende hoekpunt, door één punt gaan. Zulke driehoeken, en met name voorbeelden waarbij de verhoudingen tussen de lengtes van de drie zijden rationaal zijn, blijken een interessante en volgens ons zeker ook amusante historie te hebben.

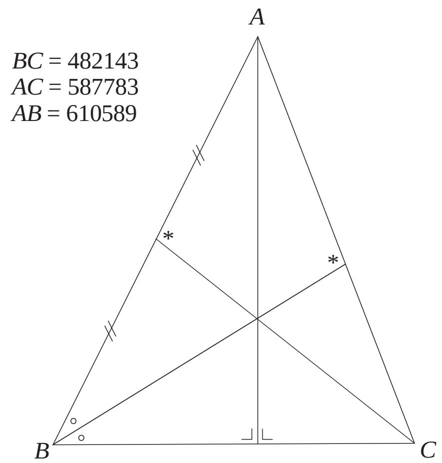
F. van der Blij, geboren in 1923, was van 1954 tot zijn emeritaat in 1988 als hoogleraar verbonden aan het Mathematisch Instituut van de (Rijks)universiteit Utrecht. Daarvoor was hij in 1947 in Leiden bij H.D. Kloosterman (1900–1968) gepromoveerd. Tien jaar geleden verscheen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* een interview [10]. Iets eerder in 2000 toonde het blad een prachtige foto van een imposante rij heren [15] waaronder Van der Blij: allemaal leerlingen van Kloosterman. De collectie 'hooglerarenportretten' van het Universiteitsmuseum Utrecht bevat een foto [20] van een jeugdige Van der Blij.

Op 16 december 2003 hield Van der Blij de slotlezing van de jaarlijkse wiskundelerarendag te Groningen, waarin de bovengenoemde driehoeken figureerden. Een summier verslag [3] hierover publiceerde hij in de *Nieuwe Wiskrant*. Vervolgens werkte hij het onderwerp van de merkwaardige driehoeken uit tot een lezing die hij gaf tijdens de Nederlandse Wiskunde Dagen (NWD) in Noordwijkerhout op vrijdag 4 februari 2005. Tussen beide voordrachten, en ook nog even erna, was er met een van ons uitgebreid contact over het onderwerp, en er waren plannen voor een gezamenlijk te schrijven artikeltje.

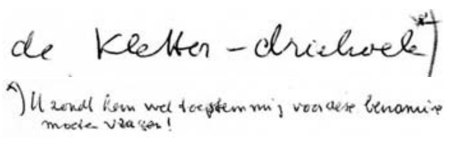
Het is er niet van gekomen. Jaren na onze correspondentie ontdekten we dat het onderwerp veel ouder is dan we wisten. De oudere resultaten erover zijn evenwel minder volledig dan de 'onze'. Bovendien was het intussen gelukt volledig elementaire argumenten voor alle gebruikte details te vinden, en dat leidde tot [2]. Een vervolg [5] hierop was aanleiding het hele verhaal op het Utrechtse stafcolloquium te vertellen, zie [17]. Tegelijk is gepoogd het aanvankelijke doel te realiseren: een tekst voor het NAW. Een eerste versie hiervan is samen met de pdf van de colloquiumvoordracht aan Van der Blij en aan zijn vroegere buurman Th.J. Kletter, die zoals we zullen zien een hoofdrol speelt in het onderwerp, toegestuurd. Daarbij zat onze uitdrukkelijke wens, de tekst voor NAW als gezamenlijk artikel aan te bieden. Helaas wilden beide heren niet ingaan op deze uitnodiging. We willen hen heel hartelijk danken voor de plezierige gesprekken en samenwerking!

Kletter-driehoeken

Definitie. Driehoek ABC heet een *Kletter-driehoek* als (op een permutatie van de hoekpunten na) de hoogtelijn uit A, een bisectrice uit B en de zwaartelijn uit C door één punt gaan. Een Kletter-driehoek heet *rationaal* als bovendien de lengtes $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$ rationale getallen zijn.



Figuur 1



Figuur 2

Het programmaboekje van de NWD in 2005 bevat een door Van der Blij aangeleverd voorbeeld, zie Figuur 1. De naamgeving is ontstaan in onze correspondentie. De eerste tekst vanuit Groningen naar Gorssel ging nog over *Van der Blij-driehoeken*, wat tot een verontrust en heel beslist telefoontje leidde dat deze naam de historie van het onderwerp geen recht doet. Zie Van der Blijs notitie in Figuur 2.

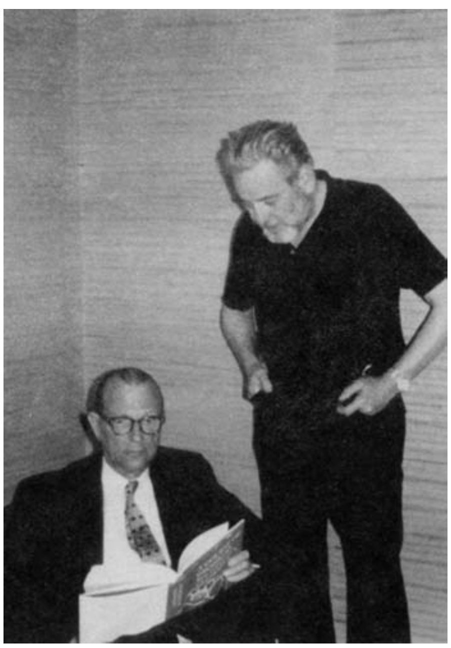
Over de 'oorsprong' van dit soort driehoeken meldt Van der Blij in de *Nieuwe Wiskrant* [3]: "In de Gorsselse serviceflat leerde ik de heer Kletter, een oud-wiskundedocent en schoolleider, kennen. Hij vertelde mij van een probleem uit zijn jeugd. Om te controleren of de leerlingen de begrippen hoogtelijn, zwaartelijn en bisectrice kenden, liet hij een driehoek tekenen met uit het hoekpunt A de hoogtelijn, uit het hoekpunt B de bisectrice en uit hoekpunt C de zwaartelijn, maar hij wilde de driehoek zó kiezen dat deze drie lijnen door één punt gaan. Daartoe zocht hij een driehoek met geheeltallige zijden. Hij had er geen kunnen vinden."

Th.J. (Theo) Kletter was van 1966 tot 1982 rector van het Mendelcollege in Haarlem, waar hij voor die tijd al als wiskundeleraar werkte. Onder zijn toenmalige leerlingen bevonden zich diverse bekende Nederlanders, zoals politicus Pim Fortuyn (Kletter komt meermalen aan het woord in Ornsteins boek [13]), journalist/presentator Paul Witteman en ook voetballer Ruud Gullit en schaatsster Yvonne van Gennip.

De Kletter-driehoeken vinden overigens hun oorsprong niet in het docentenbestaan van Theo Kletter. In 1937 stelde David L. MacKay (1887–1961), leraar aan de Evander Childs High School in New York, in de *American Mathematical Monthly* een vraag [11] over Kletter-driehoeken. Twee jaar later vroeg dezelfde MacKay [12] naar rationale Kletter-driehoeken. Een meer correcte benaming zou dus *MacKay-driehoek* of *MacKay–Kletter-driehoek* zijn. In onze Engelstalige teksten [2, 5] hanteren we de naam *albime*, afgeleid van de Engelse termen (*altitude, bisector, median*) voor hoogte-, deel- en zwaartelijn. Hier zullen we het in navolging van Van der Blij simpelweg bij Kletter-driehoek houden. In november 2014 werd (eindelijk!) Kletter voor deze benaming om instemming gevraagd, die hij met plezier verleende.

In 1940 publiceerde de Amerikaan Charles W. Trigg (1898–1989) een 'bewijs' voor de bewering dat de enige rationale Kletter-driehoek de gelijkzijdige is. Trigg begon zijn loopbaan als chemicus waarbij hij zich vooral bezighield met de productie van oploskoffie, daarna ging hij lesgeven en schreef hij onder meer een boek vol elementaire wiskundige problemen. Zijn argument is fout, zoals blijkt uit de voorbeelden van Kletter en Van der Blij. Trigg was zich kennelijk niet bewust van zijn vergissing en mogelijk was hij zelfs trots op zijn argument, want in 1972 publiceerde hij het, in een ander tijdschrift en met een verwijzing naar zijn werk uit 1940, opnieuw. Tegelijk werd een alternatief en eveneens fout 'bewijs' voor dezelfde bewering gepubliceerd, afkomstig van Leon Bankoff (1908–1997), tandarts in Beverly Hills maar ook verzot op met name elementaire meetkundeproblemen. Een interview met Bankoff staat in het in 2011 door Princeton University Press uitgebrachte boek *Fascinating Mathematical People* [1]. Een van de foto's bij die tekst is te zien in Figuur 3.

Met twee voorbeelden (MacKay en Kletter) waar een wiskundedocent vragen stelt die dan door anderen worden opgepikt, kan er nog wel een derde bij: John P. Hoyt (1907–2002) vroeg in de *Monthly* van april 1991 het bestaan van oneindig veel paarsgewijs niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken te weerleggen of te bewijzen. Hij geeft drie niet-gelijkzijdige voorbeelden, met zijden $(12, 13, 15)$ en $(35, 277, 308)$ en $(26598, 26447, 3193)$. In de hand-out [4] van Van der Blij uit 2005 komen dezelfde voorbeelden opnieuw voor. In 1995 publiceerde Richard Guy een artikel [6] in de *Monthly* waarin hij vrijwel alle ingrediënten geeft die nodig zijn om Hoyts vraag te beantwoorden. Hij verzuimt echter om het antwoord ook expliciet te vermelden. Wel vermeldt hij een antwoord afkomstig van J.G. Mauldon gezien te hebben. Jim Mauldon (1920–2002) was een Engelse wiskundige (en bekend schaker en oorlogsveteraan) die een groot deel van zijn leven werkzaam was aan Amherst College in de Verenigde Staten. In november 2014 vroegen we Richard Guy naar het nooit gepubliceerde argument van Mauldon. Zijn antwoord (hij is op dat moment 98 jaar): "I'm afraid all trace of this is lost!".



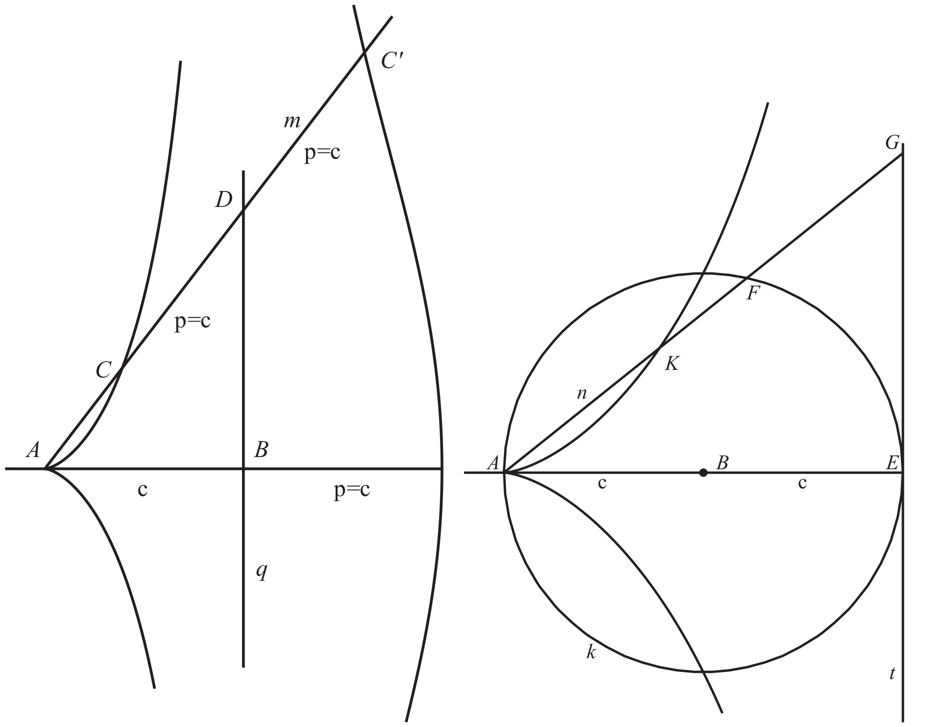
Figuur 3 Charles W. Trigg en Leon Bankoff.

Resultaten

De *hand-out* [4] die Van der Blij bij zijn voordracht op de NWD in 2005 maakte bevat geen bewijzen, maar wel enkele uitspraken over Kletter-driehoeken. Sommige daarvan zijn ontdekt door Kletter, die er bovendien fraaie synthetische bewijzen voor vond. Recent stuurde hij ons zijn tekst [9] hierover, die hij in 1957 schreef maar nooit publiceerde. De hier volgende resultaten, inclusief de hier gereproduceerde definities, notaties en bewijzen zijn afkomstig van hem. Zie ook Figuur 4.

De (keerpunts)conchoïde van Nicomedes. De Griekse wiskundige Nicomedes (derde eeuw v. Chr.) ontwierp deze kromme ten einde daarmee problemen als de kubusverdubbeling en de trisectie van een hoek op te lossen. Gegeven zijn een rechte q, een punt $A \notin q$ en een vaste lengte p. Zij B de loodrechte projectie van A op q en laat $|AB| = c$. Trek door A een rechte m en neem $D = q \cap m$. Neem C op lijnstuk DA zodat $|DC| = p$. Neem eveneens C' in het verlengde van lijnstuk AD, zodat $|DC'| = p$. Bij variabele m doorloopt C een kromme die aan dezelfde kant van q ligt als A, en C' een kromme aan de andere kant van q dan A. Deze krommen zijn de linker- en rechtertak van één kromme, die zijn naam *conchoïde* ('schelpvormige') ontleent aan het Griekse woord voor mosselschelp ($\kappa o \gamma \chi o \varsigma$, konchos). Hier beschouwen we alleen het geval $p = c$, de kromme noteren we in dit geval als (AB, q) en A blijkt dan een keerpunt te zijn.

De cissoïde van Diocles. De Griekse wiskundige Diocles (tweede eeuw v. Chr.) benutte zijn kromme voor de kubusverdubbeling. Kies op cirkel k met middelpunt B en straal c



Figuur 4 Links de keerpuntsconchoïde, rechts de cissoïde.

een vast punt A. De lijn door AB snijdt k ook in E en de raaklijn in E aan k noemen we t. Een rechte n door A snijdt k ook in F en snijdt t in G. Neem K op lijnstuk AG zodat $|AK| = |FG|$. Bij variabele n doorloopt K dan de door Diocles beschreven kromme, die we vanaf nu noteren als (AB, t). De naam cissoïde wordt wel verklaard met de opmerking dat twee van de delen waarin de cirkelschijf door de kromme wordt opgedeeld, doen denken aan blaadjes van een klimplant ($\kappa\iota\sigma\sigma o\varsigma$, klimop).

Er blijkt een relatie te zijn tussen keerpuntsconchoïde en cissoïde, waarbij Kletter-driehoeken een rol spelen. Neem een lijnstuk AE met midden B en laat q en t de loodlijnen op AE door respectievelijk B en E zijn.

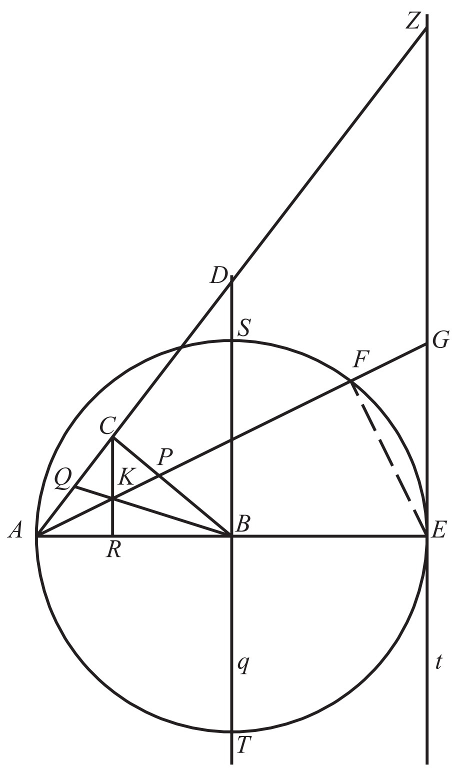
Stelling 1 (Th.J. Kletter, 1957). *Als de top C van $\triangle ABC$ de* linkertak *van de keerpuntsconchoïde (AB, q) doorloopt, dan gaan de binnendeellijn d_a door A, de zwaartelijn z_b door B en de hoogtelijn h_c door C door één punt K, en K doorloopt het binnen de basiscirkel gelegen deel van de cissoïde (AB, t).*

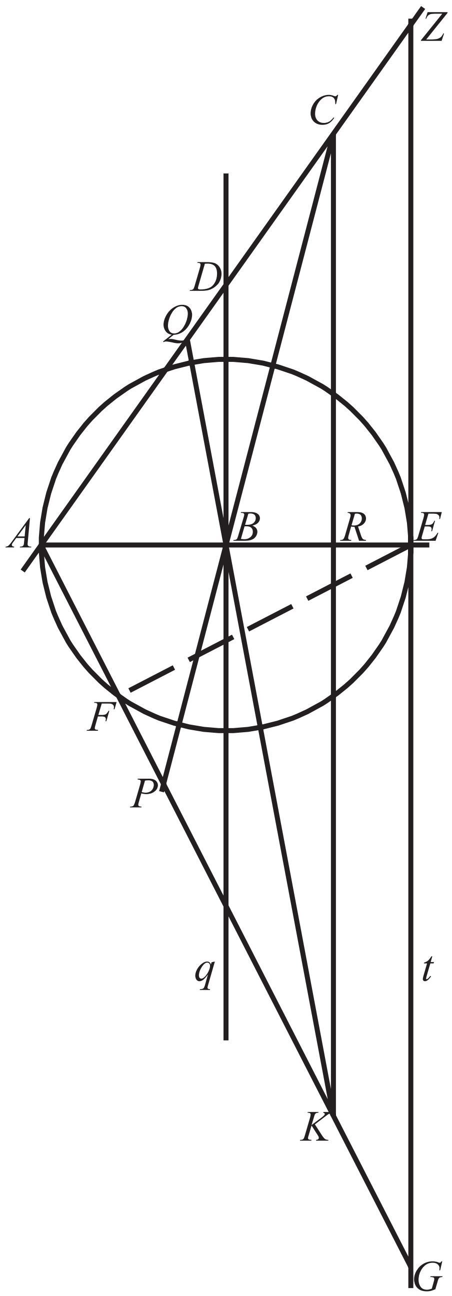
Stelling 2 (Th.J. Kletter, 1957). *Als de top C van $\triangle ABC$ de* rechtertak *van de keerpuntsconchoïde (AB, q) doorloopt, dan gaan de buitendeellijn d'_a door A, de zwaartelijn z_b door B en de hoogtelijn h_c door C door één punt K, en K doorloopt het buiten de basiscirkel gelegen deel van de cissoïde (AB, t).*

Het hier gegeven bewijs voor deze stellingen gebruikt dezelfde ingrediënten die al voorkomen in het antwoord [8] dat de Amerikaanse student J.W. Kitchens in 1937 gaf op de vraag van MacKay in de *Monthly*. Zie ook Figuur 5. Schrijf $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|$ en $D = q \cap$ lijn AC. Per definitie is $|CD| = c$ en dus $|AD| = b + c$. Schrijf $P = d_a \cap BC$, $Q = z_b \cap AC$ en $R = h_c \cap AB$. De al in de *Elementen* van Euclides bewezen deellijnstelling geeft $|BP|/|PC| = c/b$. Ook is $|AR|/|RB| = |AC|/|CD| = b/c$ (immers, de driehoeken ARC en ABD zijn gelijkvormig). Omdat per definitie $|CQ| = |QA|$, volgt

$$(|BP|/|PC|) \cdot (|CQ|/|QA|) \cdot (|AR|/|RB|) = 1.$$

De stelling van Ceva (die, zoals Jan Hogendijk [7, p. 9–10] opmerkte, al eeuwen eerder door Al-Mu'taman ibn Hud in diens *Kitab al-Istikmāl* was bewezen), impliceert nu dat inderdaad d_a, z_b en h_c een gemeenschappelijk





Figuur 5

punt K hebben. We laten zien dat K op het binnen de basiscirkel (B, c) gelegen deel van de cissoïde (AB, t) ligt.

De cirkel (B, c) snijdt de lijn door AB in A en in een punt E. Schrijf $Z =$ (lijn $AC) \cap t$, $F = d_a \cap$(cirkel (B, c)) en $G = d_a \cap t$. Gelijkvormigheid van ABD en AEZ levert $|AZ| = 2(b + c)$. De stelling van Pythagoras in AEZ geeft dan $|EZ|^2 = 4b(b+2c)$. Toepassen van de deellijnstelling op AZE met deellijn d_a leidt dan tot $|EG|^2 = 4bc^2/(b + 2c)$. Verder is vanwege de stelling van Thales EF een hoogtelijn in driehoek AEG, waaruit met behulp van het bovenstaande volgt dat $|AG|/|FG| = 2(b+c)/b$. De gelijkvormigheid van de driehoeken AKC en AGZ laat zien dat diezelfde verhouding geldt voor $|AG|/|AK|$, en dus blijkt $|AK| = |FG|$, oftewel K ligt op de cissoïde (AB, t). Het is evident dat dit punt binnen de gegeven cirkel ligt, waarmee Kletter zijn eerste stelling heeft aangetoond.

Voor het bewijs van de tweede stelling merken we op dat als C op de rechtertak van keerpuntsconchoïde (AB, q) ligt, dan volgt $|AD| = b - c$, en verder verloopt het bewijs analoog aan het bovenstaande.

De heer Kletter vond een aantal opmerkelijke eigenschappen van 'zijn' driehoeken, waarvan we er hier enkele noemen. De bewijzen zijn vrij eenvoudig ofwel uit bovenstaande argumenten te halen, ofwel gebruiken de omkeringen van Ceva's stelling en de deellijnstelling. We laten ze hier achterwege.

– Laat ABD een rechthoekige driehoek (met rechte hoek B) zijn, en kies C op de hypotenusa AD zodat $|DC| = |AB|$. Dan is ABC een Kletter-driehoek!
– Stel ABC is een Kletter-driehoek met concurrente binnendeellijn d_a en zwaartelijn z_b en hoogtelijn h_c. Laat $P = d_a \cap BC$ en $Q = z_b \cap AC$ en $R = h_c \cap AB$. Dan is $|AR| = |PR|$, en de volgende driehoeken hebben twee aan twee gelijke oppervlakte: KQA en KQC, KRA en KPC, KRB en KPB.

De vraag naar *rationale* Kletter-driehoeken is met vergelijkbare middelen aan te pakken. Daartoe kiezen we coördinaten zodat $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ en $C = (x, y)$ een Kletter-driehoek definieert. De verticale hoogtelijn door C en de zwaartelijn door $B = (c, 0)$ en $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ snijden in $(\xi, \eta) := (x, y(x - c)/(x - 2c))$. Dit legt de deellijn door A vast, en met hulp van de deellijnstelling volgt $x/(c - x) = a/c$ en dus $x = ac/(a+c)$. Ook $(c - x)^2 + y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = b^2$, dus na elimineren van y volgt $b^2 - a^2 = c(2x - c) = c^2(a - c)/(a + c)$. Deze relatie tussen de lengtes a, b, c werd in 1940 gevonden in [19] door de al eerder genoemde Charles W. Trigg. Ook de omkering geldt: voldoen positieve getallen a, b, c aan de genoemde relatie, dan is de som van elk tweetal ervan groter dan het derde getal en dus bestaat een driehoek ABC met die drie zijden. Deze driehoek is dan een Kletter-driehoek.

Door alles met een geschikte positieve factor te vermenigvuldigen mag worden aangenomen $a + c = 2$, en kan dus c uit de gegeven relatie geëlimineerd worden. De keuze $a + c = 2$ maakt de resterende vergelijking heel fraai:

Stelling 3 (Trigg). *Een drietal positieve getallen (a, b, c) met $a+c = 2$ komt voor als de drie lengtes van de zijden in een Kletter-driehoek precies dan, als geldt*

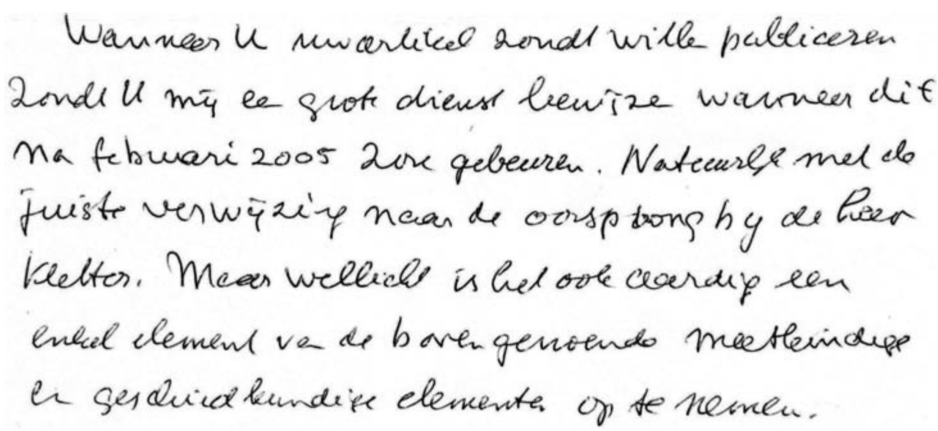
$$b^2 = a^3 - 4a + 4,$$

en na eventueel schalen met een positieve factor levert dit alle Kletter-driehoeken.

Onbekend met Triggs werk en met het werk van Guy uit 1995 werd dit resultaat later door Van der Blij ook bewezen. Ook Guy in [6] wist kennelijk niet van ouder werk aan Kletter-driehoeken, en hij geeft eveneens het bovenstaande resultaat. De vergelijking $y^2 = x^3 - 4x + 4$ waar (a, b) aan dient te voldoen, definieert een zogeheten elliptische kromme. Een korte indruk van de fascinerende theorie hierover geeft [16]; een uitvoeriger elementaire inleiding gebaseerd op de zogeheten *Philips lectures* die John Tate op Haverford College in 1961 gaf, is [14]. De (reële) punten op onze elliptische kromme vormen een topologische commutatieve groep. Een belangrijke eigenschap is, dat als twee punten met rationale coördinaten in die groep worden opgeteld, dan resulteert dit in een punt dat ook weer rationale coördinaten heeft. Van der Blij gebruikt dit als volgt. Begin met een 'gedegenereerde' Kletter-driehoek: eentje waarbij $c = 0$, dus waarbij de punten A en B samenvallen. Dat levert het punt $T = (2, 2)$ op de gegeven elliptische kromme. De door T voortgebrachte ondergroep blijkt oneindig veel elementen te hebben. Daaruit volgt, dat die ondergroep dicht ligt in de topologische groep van alle reële punten op de elliptische kromme. Gevolg: oneindig veel veelvouden (a, b) van T voldoen aan de eigenschap $0 < a < 2$. En dus bestaan er oneindig veel paarsgewijs niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken!

Voorbeelden zijn al in de hand-out [4] te vinden: $-4T = (1, 1)$ levert de gelijkzijdige driehoek (die hier dus uit de gedegenereerde voortkomt!), $7T = (10/9, 26/27)$ wat, na herschalen, het geval $(a, b, c) = (15, 12, 13)$ levert, en voor de aankondiging van zijn voordracht in Noordwijkerhout gebruikte Van der Blij $15T$. Meer voorbeelden zijn te vinden in [6] en [17].

Het argument waarmee te zien is dat er oneindig veel niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken bestaan, kan nog verscherpt worden. Ten eerste is met meer theorie over elliptische krommen aan te tonen, dat de groep bestaande uit alle punten met rationale coördinaten op de gegeven elliptische kromme *gelijk* is aan de groep voortgebracht door $T = (2, 2)$. Dit was al begin jaren zestig uitgerekend door Bryan Birch en Peter Swinnerton-Dyer, in het kader van hun grote experiment dat leidde tot het beroemde vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer. Dus blijkt elke rationale Kletter-driehoek via de groepsbewerking op de elliptische kromme, afkomstig te zijn uit het al eerder genoemde gedegenereerde geval. Ten tweede kan een zogeheten gelijkverdelingsstelling (ook wel een ergodenstelling genoemd) worden toegepast, in 1909/1910 onafhankelijk van


Wanneer U uw artikel zoudt willen publiceren
zoudt U mij een groot dienst bewijzen wanneer dit
na februari 2005 zou gebeuren. Natuurlijk met de
juiste verwijzing naar de oorsprong bij de heer
Kletter. Maar wellicht is het ook aardig een
enkel element van de bovengenoemde meetkundige
en getalkundige elementen op te nemen.

Figuur 6

elkaar bewezen door Piers Bohl uit Letland, Wacław Sierpiński uit Polen en de Duitser Hermann Weyl. Hiermee kan bepaald worden welke fractie van alle rationale punten op de gegeven elliptische kromme, x-coördinaat tussen 0 en 2 heeft (en dus correspondeert met een rationale Kletter-driehoek). Meer details hierover zijn te vinden in [2], dat op zijn beurt een aanvulling is op het artikel [6] van Guy. Samengevat luidt het eindresultaat als volgt.

Stelling 4. (a) *Elke rationale Kletter-driehoek wordt, na vermenigvuldiging met een rationale factor, als volgt verkregen. Neem een rationaal punt* (a,b) *op de elliptische kromme* E *met vergelijking* $y^2 = x^3 - 4x + 4$*, zodat* $0 < a < 2$*. Dan is de driehoek met zijden* $|AB| = 2 - a$ *en* $|AC| = |b|$ *en* $|BC| = a$ *een Kletter-driehoek.*
(b) *De groep* G *van alle punten op* E *met coördinaten in* $\mathbb{Q}$ *wordt voortgebracht door* $T = (2,2)$.
(c) *De fractie*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n\ :\ |n| \le k\ \&\ 0 < x(nT) < 2\}}{2k+1}$$

van alle punten $Q \in G$ *die* x*-coördinaat* $x(Q)$ *tussen* 0 *en* 2 *hebben, is gelijk aan*

$$\frac{\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-4t+4}}}{\int_\alpha^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-4t+4}}} = 0{,}36\ldots$$

waarbij $\alpha = -2{,}38\ldots$ *het reële nulpunt van* $x^3 - 4x + 4$ *is.*

Voor zijn hand-out [4] had Van der Blij nT bepaald voor $1 \le n \le 13$, en dat leverde vier Kletter-driehoeken op, keurig in overeenstemming met bovenstaande stelling. In Figuur 6 is te lezen wat hij in 2004 over een artikel betreffende dit onderwerp schreef. We hopen dat bovenstaande tekst aan deze wens voldoet!

Referenties

1 Donald J. Albers en Gerald L. Alexanderson, *Fascinating Mathematical People: interviews and memoirs*, Princeton University Press, 2011.

2 Erika Bakker, Jasbir S. Chahal en Jaap Top, Albime triangles and Guy's favourite elliptic curve, te verschijnen in *Expos. Math.*, 2014, doi:10.1016/j.expmath.2014.12.005.

3 F. van der Blij, Wiskunde moet uitdagender en spannender, *Nieuwe Wiskrant*, 23 (2004), 4–6.

4 F. van der Blij, Van driehoek naar kubische kromme, Hand-out Nederlandse Wiskunde Dagen, 4 februari 2005.

5 Jasbir S. Chahal en Jaap Top, Albime triangles over quadratic fields, te verschijnen in *Rocky Mountain J. Math.*, 2015.

6 Richard K. Guy, My Favorite Elliptic Curve: A Tale of Two Types of Triangles, *The Amer. Math. Monthly*, 102 (1995), 771–781.

7 Jan P. Hogendijk, Al-Mu'taman ibn Hūd, 11th Century King of Saragossa and Brilliant Mathematician, *Historia Math.*, 22 (1995), 1–18.

8 J.W. Kitchens, Solution to Problem E 263, *The Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 599–600.

9 Theo Kletter, Een merkwaardige relatie tussen twee klassieke krommen, manuscript, 1957, 6 p.

10 Hans van Lint en Rob de Jong, Het van der Blij-effect, interview met Frederik van der Blij, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/5(2) (2004), 119–124.

11 D.L. MacKay, Problem E 263, *The Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 104.

12 D.L. MacKay, Problem E 374, *The Amer. Math. Monthly* 46 (1939), 168.

13 Leonard Ornstein, *De jonge Fortuyn. De wordingsgeschiedenis van een omstreden politicus*, De Bezige Bij, Amsterdam, 2012.

14 J.H. Silverman en J.T. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1992.

15 Hans Sterk, 7 april 2000: Kloosterman Centennial Celebration, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1(2) (2000), 125–126.

16 Jaap Top, Het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/14(4) (2013), 267–272.

17 Jaap Top, Albime triangles, Colloquium lecture, Utrecht, 20 november 2014, www.math. rug.nl/~top/lectures/Utrechtalbime.pdf.

18 J. Treur, *Door te veel dingen te willen, verzand je in oppervlakkigheid*, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12(3) (2011), 190–195.

19 Charles W. Trigg, Solution to Problem E 374, *The Amer. Math. Monthly* 47 (1940), 176.

20 www.universiteitsmuseum.nl/Collectie/Detail/0285-2943, Professor Dr. Frederik van der Blij.